Γενικές ασκήσεις σελίδας 129 – 131

1.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ **(1)**, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ, η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ, που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

Λύση

(i)

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0 + 4 = 4\lambda^2 + 4 > 0$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\lambda, 0)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{4\lambda^2+4}}{2} = \sqrt{\lambda^2+1}$

(ii)

Για $\lambda = 0$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 = 1$ κύκλος C_0

Για $\lambda = 1$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ κύκλος C_1

Σύστημα, για να βρούμε τα σημεία τομής των C_0, C_1

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1-2x-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Τα σημεία τομής είναι $K(0, 1)$ και $\Lambda(0, -1)$

$K \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + 1^2 - 2\lambda\cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι C_λ διέρχονται από το K.

$\Lambda \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + (-1)^2 - 2\lambda\cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι C_λ διέρχονται από το Λ

Η εξίσωση της κοινής χορδής $K\Lambda$ είναι $x = 0$.

2.

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:\ x^2+y^2=1$ και $C_2:\ (x-2)^2+y^2=2^2$ και η ευθεία $\varepsilon:\ y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;

(ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;

(iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^o.

Λύση

Η ευθεία γράφεται $\varepsilon:\ \lambda x-y+\beta=0$

Οι κύκλοι C_1, C_2 έχουν κέντρα $K_1(0,0)$, $K_2(2,0)$ και ακτίνες $\rho_1=1$, $\rho_2=2$ αντίστοιχα.

(i)

$$d(K_1,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot 0-0+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \quad \text{και} \quad d(K_2,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot 2-0+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

(ii)

Πρέπει
$$\begin{cases} d(K_1,\varepsilon)=\rho_1 \\ d(K_2,\varepsilon)=\rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \\ \dfrac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta|=\sqrt{\lambda^2+1} \\ |2\lambda+\beta|=2\sqrt{\lambda^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\beta|=\sqrt{\lambda^2+1} \\ |2\lambda+\beta|=2|\beta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda+\beta=2\beta \ \text{ ή } \ 2\lambda+\beta=-2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda+\beta=2\beta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda+\beta=-2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda=-3\beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\lambda^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ -\dfrac{2\lambda}{3}=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda^2=1 \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \dfrac{4\lambda^2}{9}=\lambda^2+1 \\ -\dfrac{2\lambda}{3}=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^2=\dfrac{1}{3} \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4\lambda^2=9\lambda^2+9 \\ -\dfrac{2\lambda}{3}=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \quad ή \quad \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} -5\lambda^2=9 \\ -\frac{2\lambda}{3}=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \quad ή \quad \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \text{αδύνατη} \\ -\frac{2\lambda}{3}=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 2\lambda=\beta \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 2\lambda=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \beta=2\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \beta=-2\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Οι κοινές εφαπτόμενες είναι $\varepsilon_1: \quad y = \sqrt{\frac{1}{3}}\,x + 2\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\quad \varepsilon_2: \quad y = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,x - 2\sqrt{\frac{1}{3}}$

(iii)

Επειδή οι κύκλοι έχουν τη διάκεντρό τους πάνω στον άξονα $x'x$, είναι συμμετρικοί ως προς τον $x'x$, άρα οι κοινές εφαπτόμενές τους τέμνονται πάνω σε αυτόν.

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (\sqrt{3}\,, 1) \parallel \varepsilon_1$ και το $\vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}\,,-1) \parallel \varepsilon_2$

$$συν(\varepsilon_1 \hat{,} \varepsilon_2) = συν(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}-1\cdot 1}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+1}} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $(\varepsilon_1 \hat{,} \varepsilon_2) = 60^o$

3.

Μια ευθεία $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda \neq 0$, τέμνει την παραβολή $y^2 = 4x$ σε δύο σημεία Α και Β.

(i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda}\right)$

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το Μ, όταν

(α) $\lambda = 1$ και το β μεταβάλλεται

(β) $\beta = 0$ και το λ μεταβάλλεται.

Λύση

(i)

Οι συντεταγμένες των Α, Β είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων

$y = \lambda x + \beta$ **(1)** και $y^2 = 4x$ **(2)**

Λόγω τη (1), η (2) γράφεται $(\lambda x + \beta)^2 = 4x$

$$\lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 - 4x = 0$$

$$\lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - 2)x + \beta^2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση $2^{ου}$ ως προς x και έχει λύση αν και μόνο αν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda\beta \leq 1$ **(1)**. Έστω x_A, x_B οι ρίζες αυτής, τότε επειδή Μ μέσο του ΑΒ,

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2(\lambda\beta-2)}{\lambda^2}\right) = \frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}$$

$M \in$ στην ευθεία (1), άρα $y_M = \lambda x_M + \beta = \lambda \frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2} + \beta =$

$$\frac{2-\lambda\beta}{\lambda} + \beta = \frac{2-\lambda\beta+\lambda\beta}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

(ii)

(α) $y_M = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{1} = 2$, $x_M = 2 - \beta$, $\beta \leq 1$

άρα το Μ βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία $y = 2$ με $x \geq 1$

(β) $y_M = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{y_M}$, $y_M \neq 0$

$$x_M = \frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2} \Rightarrow x_M = \frac{2-\lambda\cdot 0}{\lambda^2} \Rightarrow x_M = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 x_M = 2 \Rightarrow \frac{4}{y_M^2} x_M = 2 \Rightarrow y_M^2 = 2x_M$$

άρα το Μ βρίσκεται πάνω στην παραβολή $y^2 = 2x$ εκτός του σημείου της (0 , 0)

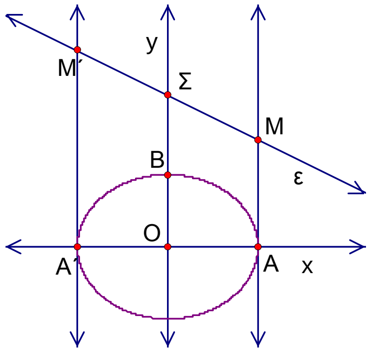
4.

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο $\Sigma(0,2\beta)$. Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τις εφαπτόμενες , στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης στα σημεία M και M'.

(i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MM' συναρτήσει του λ.

(ii) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ο κύκλος αυτός διέρχετα από τις εστίες της έλλειψης;

Λύση



Έστω $\varepsilon:\ y-2\beta=\lambda(x-0)$ η δοσμένη ευθεία από το Σ $\Leftrightarrow$ $y=\lambda x+2\beta$.

(i)

Για $x_M=\alpha$ δίνει $y_M=\lambda\alpha+2\beta$

Για $x_{M'}=-\alpha$ δίνει $y_{M'}=-\lambda\alpha+2\beta$

Ο άξονας $y'y$ είναι μεσοπαράλληλη ευθεία των εφαπτομένων στα A, A', άρα το κέντρο του κύκλου είναι το Σ.

$(\Sigma M)^2=(\alpha-0)^2+(\lambda\alpha+2\beta-2\beta)^2$

$=\alpha^2+\lambda^2\alpha^2$

Η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου MM' είναι $x^2+(y-2\beta)^2=\alpha^2+\lambda^2\alpha^2$

(ii)

Για να διέρχεται ο κύκλος από τις εστίες πρέπει και αρκεί η εξίσωσή του να επαληθεύεται από αυτές $\Leftrightarrow$ $(\pm\gamma)^2+(0-2\beta)^2=\alpha^2+\lambda^2\alpha^2$

$\gamma^2+4\beta^2=\alpha^2+\lambda^2\alpha^2$

$\alpha^2-\beta^2+4\beta^2=\alpha^2+\lambda^2\alpha^2$

$3\beta^2=\lambda^2\alpha^2$

$\lambda\alpha=\pm\beta\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda=\pm\frac{\beta\sqrt{3}}{\alpha}$

5.

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $y = x + 1$.

Λύση

Για τη δοσμένη έλλειψη έχουμε $4^2 = 5^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \gamma = 3$

Άρα και για την υπερβολή είναι $\gamma = 3$ και οι εστίες είναι στον άξονα των x

Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η ζητούμενη υπερβολή $\Leftrightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$

Η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=x+1 & (1) \\ \beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2 & (2) \end{cases}$

δίνει τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας – υπερβολής.

Λόγω της (1) η (2) $\Leftrightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2 (x+1)^2 = \alpha^2 \beta^2$

$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 (x^2 + 2x + 1) = \alpha^2 \beta^2$$

$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 x^2 - 2\alpha^2 x - \alpha^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$(\beta^2 - \alpha^2) x^2 - 2\alpha^2 x - \alpha^2 (1 + \beta^2) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$\Delta = 4\alpha^4 + 4(\beta^2 - \alpha^2)\alpha^2(1+\beta^2) = 4\alpha^2[\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)(1+\beta^2)]$$

$$= 4\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 + \beta^4 - \alpha^2 - \alpha^2\beta^2) =$$

$$= 4\alpha^2(\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2)$$

$$= 4\alpha^2\beta^2(1 + \beta^2 - \alpha^2)$$

Για να εφάπτεται η υπερβολή στην ευθεία $y = x + 1$ πρέπει και αρκεί η εξίσωση (3) να είναι 2ου βαθμού και να έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow$

$\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$ και $\Delta = 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$ και $1 + \beta^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2 \neq \alpha^2$ και $\beta^2 - \alpha^2 = -1$ **(4)**

Αλλά $\gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9$ **(5)**

$(4) + (5) \Rightarrow 2\beta^2 = 8 \Rightarrow \beta^2 = 4$

$(5) - (1) \Rightarrow 2\alpha^2 = 10 \Rightarrow \alpha^2 = 5$

Άρα η ζητούμενη υπερβολή είναι $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

6.

Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1} = (4, 0)$ και $\overrightarrow{OA_2} = (1, 0)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Αν τα διανύσματα αρχίσουν συγχρόνως να περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα αλλά με αντίθετη φορά, να αποδείξετε ότι το πέρας Μ της συνισταμένης τους διαγράφει έλλειψη.

Λύση

Έστω ω η γωνιακή ταχύτητα.

Σε χρόνο t, το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ θα διαγράψει γωνία ωt, οπότε θα έχει συντεταγμένες

$\overrightarrow{OA_1}$ = (4συνωt, 4ημωt),

ενώ το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_2}$ θα διαγράψει γωνία – ωt, οπότε θα έχει συντεταγμένες

$\overrightarrow{OA_2}$ = (συν(–ωt), ημ(–ωt)) = (συνωt, – ημωt).

Η συνισταμένη τους θα είναι $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ = (5 συνωt, 3 ημωt).

Οι συντεταγμένες (x, y) του πέρατος Μ, θα είναι x = 5συνωt και y = 3ημωt $\Rightarrow$

$\frac{x}{5} = συνωt$ και $\frac{y}{3} = ημωt \Rightarrow$

$\frac{x^2}{5^2} = συν^2ωt$ και $\frac{y^2}{3^2} = ημ^2ωt \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

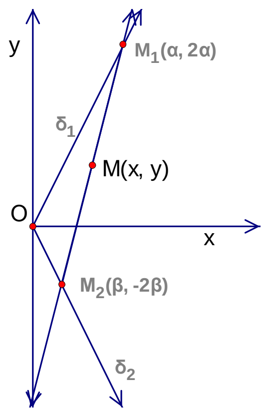
7.

Δίνονται οι ημιευθείες $\delta_1 : y = 2x$ και $\delta_2 : y = -2x$, $x \in (0, +\infty)$ και μια ευθεία ε, η οποία τις τέμνει στα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχα.

(i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των M_1 και M_2 συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $M_1 M_2$.

(ii) Να αποδείξετε ότι, όταν η ευθεία ε κινείται, έτσι ώστε το τρίγωνο OM_1M_2 να έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με 2, τότε το M κινείται στον ένα κλάδο μίας σταθερής υπερβολής.

Λύση



(i)

Έστω α η τετμημένη του M_1.

Επειδή $M_1 \in \delta_1$, θα είναι $M_1(\alpha, 2\alpha)$

Έστω β η τετμημένη του M_2.

Επειδή $M_2 \in \delta_2$, θα είναι $M_2(\beta, -2\beta)$

Οι συντεταγμένες του μέσου M θα είναι

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{2\alpha-2\beta}{2} \quad \Rightarrow$$

$2x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$ λύνουμε ως προς α, β

$$(+) \quad 2x + y = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2x+y}{2}$$

$$(-) \quad 2x - y = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2x-y}{2}$$

(i)

$$(OM_1M_2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})\right| = 2$$

$$\left|\begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \beta & -2\beta \end{vmatrix}\right| = 4$$

$$|-2\alpha\beta - 2\alpha\beta| = 4$$

$$4\alpha\beta = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\beta = 1$$

$$\frac{2x+y}{2}\,\frac{2x-y}{2} = 1$$

$$4x^2 - y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{με} \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{από υπόθεση}$$

8.

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2: \alpha^2 x^2+\beta^2 y^2=1$ με $0<\beta<\alpha$. Η ημιευθεία $y=(\varepsilon\varphi\theta)\,x$, $x>0$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ τέμνει τη C_1 στο σημείο $\Gamma_1(x_1,\ y_1)$ και τη C_2 στο σημείο $\Gamma_2(x_2,\ y_2)$.

Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2, να αποδείξετε ότι $\lambda_1\lambda_2=(\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$.

Λύση

Η C_1 γράφεται $\beta^2 x^2+\alpha^2 y^2=\alpha^2\beta^2$

Η εφαπτομένη ε_1 της C_1 στο Γ_1 έχει εξίσωση $\beta^2 x_1 x+\alpha^2 y_1 y=\alpha^2\beta^2$

Άρα $\lambda_1=-\dfrac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$.

Αλλά $\Gamma_1\in$ στην ημιευθεία $y=(\varepsilon\varphi\theta)\,x$, άρα $y_1=(\varepsilon\varphi\theta)\,x_1$

οπότε $\lambda_1=-\dfrac{\beta^2 x_1}{\alpha^2(\varepsilon\varphi\theta)x_1}=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2(\varepsilon\varphi\theta)}$ **(1)**

Η εφαπτομένη ε_2 της C_2 στο Γ_2 έχει εξίσωση $\alpha^2 x_2 x+\beta^2 y_2 y=1$

Άρα $\lambda_2=-\dfrac{\alpha^2 x_2}{\beta^2 y_2}$

Αλλά $\Gamma_2\in$ στην ημιευθεία $y=(\varepsilon\varphi\theta)\,x$, άρα $y_2=(\varepsilon\varphi\theta)\,x_2$

οπότε $\lambda_2=-\dfrac{\alpha^2 x_2}{\beta^2(\varepsilon\varphi\theta)x_2}=-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2(\varepsilon\varphi\theta)}$ **(2)**

(1). (2) : $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2(\varepsilon\varphi\theta)}\,\dfrac{\alpha^2}{\beta^2(\varepsilon\varphi\theta)}=(\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$.

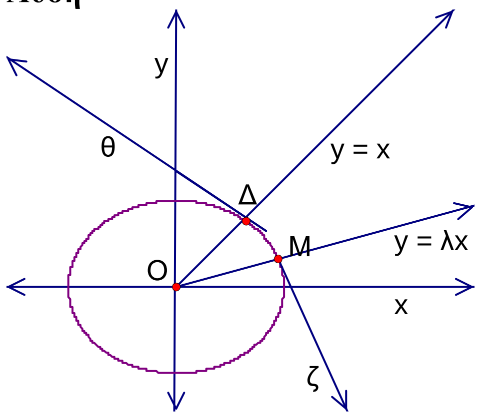
9.

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

(i) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης

(ii) Έστω Μ το σημείο του πρώτου τεταρτημόριου στο οποίο η ευθεία $y=\lambda x$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Μ, τότε να εκφράσετε το γινόμενο $\lambda\mu$ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α, β.

Λύση



Η έλλειψη γράφεται

$\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ **(1)**

(i)

Η διχοτόμος τέμνει την έλλειψη σε σημείο $\Delta(x_1,x_1)$

$$(1)\Rightarrow\ \beta^2x_1^2+\alpha^2x_1^2=\alpha^2\beta^2$$

$$(\beta^2+\alpha^2)x_1^2=\alpha^2\beta^2$$

$$x_1\sqrt{\beta^2+\alpha^2}=\alpha\beta$$

$$x_1=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Η εφαπτομένη θ στο Δ έχει εξίσωση $\beta^2x_1x+\alpha^2y_1y=\alpha^2\beta^2$

$$\beta^2\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x+\alpha^2\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}y=\alpha^2\beta^2$$

$$\beta^2x+\alpha^2y=\alpha\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Άρα $\lambda_\theta=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\Rightarrow \alpha^2=2\beta^2\Rightarrow$

$$\alpha^2=2(\alpha^2-\gamma^2)\Rightarrow \alpha^2=2\alpha^2-2\gamma^2\Rightarrow$$

$$\alpha^2=2\gamma^2\Rightarrow \alpha=\gamma\sqrt{2}\Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii)

Έστω $M(x_2,\lambda x_2)$

Η εφαπτομένη ζ στο Μ έχει εξίσωση $\beta^2x_2x+\alpha^2\lambda x_2y=\alpha^2\beta^2$

Άρα $\lambda_\zeta=-\frac{\beta^2x_2}{\lambda\alpha^2x_2}\Rightarrow \mu=-\frac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}\Rightarrow \lambda\mu=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$

Αλλά στο (i) αποδείχθηκε ότι $-\frac{1}{2}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Άρα $\lambda\mu=-\frac{1}{2}$

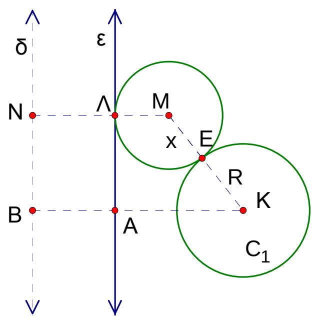
10.

(i) Δίνονται ένας κύκλος C_1 με κέντρο Κ και ακτίνα R και μια ευθεία ε που δεν έχει κοινό σημείο με τον κύκλο C_1. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C, που εφάπτονται της ε και του κύκλου C_1 εξωτερικά, ανήκουν σε σταθερή παραβολή.

(ii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2, με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2 αντιστοίχως, από τους οποίους ο C_2 είναι εσωτερικός του C_1. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C, που εφάπτονται εσωτερικά του C_1 και εξωτερικά του C_2, ανήκουν σε σταθερή έλλειψη.

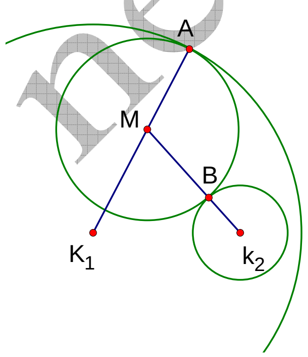
(iii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2, με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2 αντιστοίχως, που βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C, που εφάπτονται εξωτερικά και των δύο κύκλων C_1 και C_2 ανήκουν σε κλάδο σταθερής υπερβολής.

Λύση



(i)
Έστω κύκλος (Μ, x) που εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία ε σε σημείο Λ.
Φέρνουμε τη διάκεντρο ΚΕΜ, $ΜΛ \perp ε$ και $ΚΑ \perp ε$.
Προεκτείνουμε την ΚΑ κατά τμήμα ΑΒ = R, και φέρνουμε ευθεία $δ \| ε$.
Επίσης, προεκτείνουμε τη ΜΛ, μέχρι να τμήσει τη δ σε σημείο Ν, οπότε ΛΝ = ΑΒ = R.

Είναι ΜΚ = x + R = ΜΛ + ΛΝ = ΜΝ, δηλαδή το Μ ισαπέχει από το σταθερό σημείο Κ και τη σταθερή ευθεία δ, άρα ανήκει σε παραβολή, που έχει εστία Κ και διευθετούσα δ.



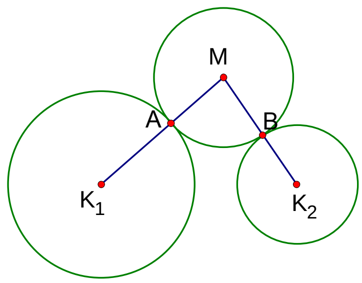
(ii)
Έστω κύκλος (Μ, x) που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C_1 και εξωτερικά στον κύκλο C_2, με σημεία επαφής Α, Β αντίστοιχα.

Φέρνουμε την K_1MA και την K_2BM.

Είναι $MK_1 + MK_2 = AK_1 - AM + MB + BK_2$
$= R_1 - x + x + R_2$
$= R_1 + R_2$

δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα σταθερά σημεία K_1, K_2 είναι σταθερό $R_1 + R_2$, άρα ανήκει σε έλλειψη με εστίες K_1, K_2 και $2α = R_1 + R_2$.

(iii)



- Όταν $R_1 > R_2$

Έστω κύκλος (M, x) που εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στον κύκλο C_2, με σημεία επαφής A, B αντίστοιχα.

Φέρνουμε τις διακέντρους MAK_1 και MBK_2.

Είναι
$$\begin{aligned} MK_1 - MK_2 &= MA + AK_1 - (MB + BK_2) \\ &= x + R_1 - x - R_2 \\ &= R_1 - R_2 \end{aligned}$$
δηλαδή η διαφορά των αποστάσεων του M από τα σταθερά σημεία K_1, K_2 είναι σταθερή $R_1 - R_2$, άρα ανήκει σε κλάδο υπερβολής με εστίες K_1, K_2 και $2\alpha = R_1 - R_2$.

- Όταν $R_1 < R_2$ τότε πρόκειται για τον άλλο κλάδο της ίδιας υπερβολής.

- Όταν $R_1 = R_2$ τότε είναι $MK_1 = MK_2$, οπότε το M ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος K_1K_2.

11.

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το σημείο της $M(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \beta\eta\mu\varphi)$.

(i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Μ.

(ii) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών Ε και Ε΄ από την εφαπτομένη είναι σταθερό.

(iii) Για ποια τιμή του φ το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η εφαπτομένη με τους άξονες γίνεται ελάχιστο;

Λύση

(i)

Εφαπτομένη στο Μ $\quad \varepsilon:\ \frac{x\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha^2}+\frac{y\beta\eta\mu\varphi}{\beta^2}=1 \iff$

$$\frac{x\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha}+\frac{y\eta\mu\varphi}{\beta}=1 \iff$$

$$x\beta\sigma\upsilon\nu\varphi + y\alpha\eta\mu\varphi - \alpha\beta = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

(ii)

$$d(E,\varepsilon)\,.\,d(E',\varepsilon)=\frac{|\gamma\beta\sigma\upsilon\nu\varphi+0\cdot\alpha\eta\mu\varphi-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}}\cdot\frac{|-\gamma\beta\sigma\upsilon\nu\varphi+0\cdot\alpha\eta\mu\varphi-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}}$$

$$=\frac{|\gamma\beta\sigma\upsilon\nu\varphi-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}}\cdot\frac{|\gamma\beta\sigma\upsilon\nu\varphi+\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}}$$

$$=\frac{\beta|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi-\alpha|\ \beta|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi+\alpha|}{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}$$

$$=\beta^2\frac{|\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\alpha^2|}{(\alpha^2-\gamma^2)\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi)}$$

$$=\beta^2\frac{|\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\alpha^2|}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2-\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$=\beta^2\frac{|\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\alpha^2|}{-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2}$$

$$=\beta^2$$

$*\quad 0<\gamma<\alpha \ \Rightarrow\ \gamma^2<\alpha^2$

αλλά $0\le\sigma\upsilon\nu^2\varphi\le 1$

Άρα $\gamma^2\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi<\alpha^2$

(iii)

Η (1) για $y=0$ δίνει $x=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$.

Άρα η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $K(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi},0)$

Η (1) για $x=0$ δίνει $y=\frac{\beta}{\eta\mu\varphi}$.

Άρα η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\Lambda(0,\frac{\beta}{\eta\mu\varphi})$

$$(ΟΚΛ) = \frac{1}{2}\,|ΟΚ|\,|ΟΛ| = \frac{1}{2}\left|\frac{α}{συνφ}\right|\left|\frac{β}{ημφ}\right|$$

$$= \left|\frac{αβ}{2ημφ\ συνφ}\right| = \frac{αβ}{|ημ2φ|}$$

Το εμβαδόν (ΟΚΛ) γίνεται ελάχιστο όταν το $|ημ2φ|$ γίνεται μέγιστο δηλαδή

$|ημ2φ| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ημ2φ = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2φ = 2κπ \pm \frac{π}{2} \quad \Leftrightarrow \quad φ = κπ \pm \frac{π}{4}$.